Université de Fribourg

Statistique propédeutique :
Liste d'exercices en lien avec le changement climatique

Rédigé par:
Elodie Martinet
Adline Vouillamoz
Louis Faul
Xavier Richard

Responsable du cours:
Prof. Christian Mazza

Cette première série de quatre exercices est basée sur des données produites par le laboratoire Global Land Analysis & Discovery (GLAD) de l'Université du Maryland [1] mesurant les zones de perte de couverture forestière (en hectares) due aux incendies par rapport à tous les autres facteurs sur l'ensemble des terres du globe.

Les données sont disponibles sur Moodle, sous le nom de "forestfires.csv".

La « couverture arborée » peut se référer aux arbres dans les plantations ainsi qu'aux forêts naturelles, et la « perte de la couverture arborée » est le retrait de la canopée de l'arbre en raison de causes humaines ou naturelles, y compris les incendies.

Exercice 1. (5 points) ⋆
Comparons la perte de couverture arborée, entre les années 2012 et 2021.

Pays	Perte de couverture arborée en 2021 (ha)	Perte de couverture arborée en 2012 (ha)
France	112886	67303
Suisse	3160	3527
Espagne	85792	80495
USA	2043920	1963951
Australie	261044	139803

1. Calculer le nombre moyen d'hectares de perte de couverture arborée en 2012 et en 2021.

2. Représentez les données de perte de couverture arborée en 2021 sous forme de graphique en secteurs et de diagramme à bâtons.

3. Faire la même chose pour les données de 2012.

[1] Tyukavina, A., Potapov, P., Hansen, M.C., Pickens, A., Stehman, S., Turubanova, S., Parker, D., Zalles, A., Lima, A., Kommareddy, I., Song, X-P, Wang, L and Harris, N., Global trends of forest loss due to fire, 2001-2019, https://doi.org/10.3389/frsen.2022.825190

Exercice 2. (5 points) $\star$
Voici les données de la perte de la couverture arborée en Suisse entre 2001 et 2021.

Année	Perte de couverture arborée (ha)	Perte de couverture arborée due aux incendies (ha)
2001	6735	44
2002	3801	18
2003	5760	81
2004	5364	71
2005	4535	62
2006	9431	60
2007	6469	57
2008	4582	39
2009	10654	792
2010	6660	99
2011	2622	43
2012	3527	83
2013	3126	65
2014	4960	121
2015	3216	42
2016	4802	49
2017	6377	374
2018	1920	24
2019	4117	363
2020	2684	27
2021	3160	64

1. Calculer la moyenne de la perte de couverture arborée entre 2001 et 2010 (inclus), puis entre 2011 et 2021 (inclus).
2. Faire la même chose pour la perte de couverture arborée due aux incendies.
3. Comparer les résultats entre les deux périodes de temps. Le résultat est il contre-intuitif ?

Ces résultats peuvent être dûs au fait que la méthode d'analyse de la carte de base de la perte de couverture forestière sur GFW, qui est utilisée comme entrée pour cet ensemble de données, a été modifiée de nombreuses façons afin d'améliorer la détection de la perte boréale due aux incendies, à l'agriculture de rotation des petits exploitants dans les forêts tropicales, à l'abattage sélectif et aux plantations à cycle court pour les données couvrant la période 2011-2021

4. Réaliser un histogramme pour représenter les données de perte de couverture arborée entre 2001 et 2021.
5. Faire la même chose pour la perte de couverture arborée due aux incendies.

Exercice 3. (5 points) $\star$
On s'intéresse ici à la perte de la couverture arborée en France, de 2011 à 2021. (Vous pouvez retrouver les données ci-dessous sur Moodle).

Année	Perte de couverture arborée (ha)	Perte de couverture arborée due aux incendies (ha)
2011	64074	1127
2012	67303	2592
2013	30352	329
2014	44359	696
2015	37293	436
2016	60768	1980
2017	69249	5857
2018	69201	2657
2019	81304	3298
2020	77746	2518
2021	112886	3508

1. Calculer la médiane ainsi que les premier et troisième quartiles pour la perte de couverture arborée de 2011 à 2021 en France.

2. Représenter les données pour la perte de couverture arborée de 2011 à 2021 en France avec un Boxplot, et indiquer où se trouvent la médiane et les deux quartiles calculés au point 1.

3. Faire pareil pour la perte de couverture arborée due aux incendies en France de 2011 à 2021.

4. Est-ce que la moyenne est représentée sur le Boxplot ? Si oui où se trouve-t-elle? Sinon la calculer et indiquer approximativement où elle se trouverait sur le Boxplot.

5. Faire un Boxplot pour la période 2012 à 2016 et un autre pour la période 2017 à 2021 pour la perte de couverture arborée et comparer les deux.

Exercice 4. (5 points) $\star$
En reprenant les données de l'exercice 3:

1. Représentez graphiquement l'évolution de la perte de couverture arborée en fonction du temps. Commentez votre graphique.

2. Représentez la perte de couverture arborée due aux incendies en fonction de la perte de couverture arborée. Commentez votre graphique.

Exercice 5. (4 points) $\star\star$
En 2023, il y a 175 personnes inscrites au cours de Statistiques propédeutiques. Après trois semaines de cours, Xavier Richard a utilisé ses capacités de déduction peu communes et en est arrivé aux conclusions suivantes :

- 125 personnes utilisent quotidiennement Twitter, TikTok ou Instagram.
- 29 personnes ont des doutes quand à la responsabilité humaine dans le changement climatique.
- 61 personnes n'ont jamais participé à une grève pour le climat.

Ces déductions sont déjà incroyables, mais Xavier Richard est allé plus loin encore :

- 21 personnes utilisent quotidiennement un réseau social et doutent de la responsabilité humaines.
- 52 personnes utilisent quotidiennement un réseau social et n'ont jamais participé à une grève pour le climat.
- 22 personnes doutent de la responsabilité humaine et n'ont jamais participé à une grève pour le climat.
- Et enfin, 19 personnes utilisent quotidiennement un réseau social, doutent de la responsabilité humaine et n'ont jamais participé à une grève pour le climat.

Xavier Richard se pose la question naturelle et existentielle suivante : combien de personnes n'utilisent aucun réseau social, n'ont aucun doutes quand à la responsabilité humaine dans le changement climatique et ont déjà participé à une grève pour le climat ?

1. Répondez à cette question à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Répondez à cette même question à l'aide d'opérations sur les ensembles (union, intersection, complémentaire).

Exercice 6. (4 points) $\star\star$
Selon des chiffres de l'INSEE, 28.2% des personnes inscrites sur listes électorales se sont abstenues, lors du second tour de l'élection présidentielle française de 2022.
En France, les personnes peuvent voter à partir de 18 ans. On sait que 5.5% des personnes inscrites sur les listes électorales ont entre 18 et 24 ans. Parmi les 18-24 ans, 41% des personnes se sont abstenues.
On va dans la suite du problème uniquement considérer les personnes inscrites sur listes électorales. On définit les événements suivants :

- A : La personne a entre 18 et 24 ans.
- B : La personne a 25 ans ou plus.
- C : La personne s'est abstenue.
- D : La personne ne s'est pas abstenue.

Répondez aux questions suivantes en utilisant les notations correctes:

1. En prenant une personne au hasard inscrite sur les listes électorales, quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 25 ans? Qu'elle ne se soit pas abstenue?
2. Définissez mathématiquement l'événement "la personne a plus de 25 ans et s'est abstenue".
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculez la probabilité qu'une personne s'est abstenue sachant qu'elle a plus de 25 ans.
4. Louis, qui est une personne au hasard dans la population, s'est abstenu. Quelle est la probabilité que Louis ait entre 18 et 24 ans (la formule de Bayes peut peut-être vous venir en aide) ?
5. Selon un sondage, 80% des jeunes abstentionnistes entre 18 et 24 ans, seraient prêt à aller voter si les thématiques du changement climatiques et de la justice sociale, étaient plus au coeur des préoccupations des candidats.
   Quel serait alors le taux d'abstention global ? (en considérant que cela n'a aucun impact sur l'abstention des 25 ans et plus)

Exercice 7. ⋆
Selon, l'OMS [2] chaque année l'industrie du tabac détruit entre autres plusieurs centaines de millions d'arbres, des milliers d'hectares de terres et est surtout responsable de l'émission de 84 millions de tonnes de CO_2 (qui est l'équivalent de $\frac{1}{5}$ du CO_2 émis par tout le transport aérien commercial dans le monde).
Après avoir vu ces quelques chiffres, différentes personnes vont remettre en question leurs habitudes de consommation de cigarettes. Dans cet exercice nous considérerons les cas de Laura 25 ans et Vincent 61 ans. On va considérer les événements suivants :

- A : Laura fume encore dans 5 ans
- B : Vincent fume encore dans 5 ans
- C : Vincent et Laura fument encore les deux dans 5 ans

De plus, on connaît la probabilité de ces 3 événements : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{32}$.

1. A l'aide d'opérations sur les ensembles, exprimez les événements suivants :
   - D: L'un des deux au moins fume encore dans 5 ans
   - E: Vincent et Laura arrêtent les deux de fumer dans les 5 ans
   - F: seule Laura fume encore dans 5 ans
2. Calculez les probabilités des événements D, E et F. Ensuite calculez la probabilité de l'événement G={dans 5 ans, Laura fume encore, sachant que Vincent est toujours fumeur}

Exercice 8. *Probabilité d'extinction d'une espèce menacée* (5 points) ⋆⋆
Le rapport Planète Vivante du WWF révèle une baisse dévastatrice de 69% des populations d'animaux sauvages vertébrés en moins de cinquante ans.
Parmi les nombreuses espèces animales aujourd'hui en voie de disparition, certaines ne comptent plus que quelques dizaines d'individus. Dans cet exercice, nous allons étudier la probabilité qu'une telle extinction apparaisse.
Supposons, pour donner un exemple concret, que chaque individu a au cours de sa vie :

- aucun enfant avec probabilité 1/8
- un enfant avec probabilité 3/8
- deux enfants avec probabilité 3/8
- trois enfants avec probabilité 1/8

[2] Pour en savoir plus, vous pouvez consulter l'article suivant : https://www.who.int/fr/news/item/31-05-2022-who-raises-alarm-on-tobacco-industry-environmental-impact

Les nombres d'enfants d'individus différents sont de plus supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu ait 4 enfants ou plus, selon ce modèle?

2. Supposons qu'il y'ait initialement 2 individus. Quelle est la probabilité d'extinction au bout d'1 génération ?
   Même question s'il y'a initialement N individus.

Supposons désormais dans la suite de l'exercice, qu'il y'a initialement 1 seul individu. On note alors q_n, la probabilité d'extinction après n générations.

3. Calculer q_2 et q_3.

On peut en fait montrer par récurrence que :

$$q_{n+1} = f(q_n)$$

avec

$$f(q) = \frac{1}{8} + \frac{3q}{8} + \frac{3q^2}{8} + \frac{q^3}{8}$$

4. **Question bonus :** La probabilité d'extinction à long terme est donnée par les points fixes, à savoir les solutions de l'équation $f(q) = q$. Résoudre cette équation.
   Quelle est la seule solution pouvant représenter la probabilité d'extinction à long terme ?

Exercice 9. *Qu'arrive-t-il aux poissons migrateurs?* (p 37 du "rapport planète Vivante 2022") (5 points)
De nombreuses espèces de poissons migrent pour se nourrir et se reproduire mais ces déplacements dépendent de la connectivité des écosystèmes d'eau douce, aujourd'hui en déclin. Seuls 37% des fleuves de plus de 1000 km de long sont encore naturels sur toute leur longueur. Lorsque certaines espèces de poissons parcourent de grande distances durant leur migration, la présence de barrages et de réservoirs constitue une menace pour leur survie.

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le nombre de poissons de l'espèce 1 qui survivent à ce voyage vers leur lieu de reproduction un jour donné. Pour cet exercice, on va supposer que cette variable aléatoire suit une loi de poisson de paramètre 7.
   Calculez la probabilité que 10 poissons de l'espèce 1 aient survécu ce jour-là.

2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le nombre de poissons de l'espèce 2 qui survivent à ce voyage vers leur lieu de reproduction un jour donné. On suppose cette fois que cette variable aléatoire suit une loi de poisson de paramètre 9.
   Calculez la probabilité qu'au maximum, 13 poissons de l'espèce 2 aient survécu ce jour-là.

3. Expliquez avec vos mots ce qu'est une variable aléatoire puis plus particulièrement une variable aléatoire suivant une loi de poisson.

Exercice 10. *Moyenne des précipitations annuelles en Suisse* (5 points) $\star$
Selon le bulletin climatologique de l'année 2022, l'année a notamment été marquée par un manque de précipitations persistant.
Météo Suisse fournit des cartes mensuelles et annuelles de température, précipitations, durée d'ensoleillement,...vous pouvez aller jeter un coup d'oeil sur le lien suivant: https://www.meteosuisse.admin.ch/services-et-publications/applications/ext/climate-maps-public.html et essayez de changer par vous-même les différents paramètres pour voir l'évolution au cours des années. On va dans cet exercice s'intéresser à la moyenne annuelle des précipitations en millimètres en Suisse des 50 dernières années, c'est-à-dire entre 1973 et 2022.
Pour chaque année on regarde si la quantité moyenne de précipitations en Suisse est plus basse que 1200 mm. Ceci nous donne des variables aléatoires X_{1973}, X_{1974},..,X_{2022} avec :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la quantité moyenne de précipitations est plus basse que 1200 mm avec probabilité 55\%,} \\ 0 & \text{si la quantité moyenne de précipitations est plus haute que 1200 mm avec probabilité 45\%.} \end{cases}$$

On note X le nombre de fois que la quantité moyenne de précipitations a été plus basse que 1200 mm entre 1973 et 2022, c'est-à-dire $X = X_{1973} + X_{1974} + ... + X_{2022}$.

1. Quelle loi suivent les variables aléatoires X_i? Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculez $\mathbb{P}(X = 22)$ et $\mathbb{P}(X = 23)$
3. Calculez $\mathbb{P}(22 \leq X \leq 23)$
4. Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de X

Exercice 11. *Détection d'une maladie lors d'une épidémie* (5 points) $\star\star$
Selon plusieurs études, dont une publiée dans le journal *Nature*, le réchauffement climatique augmenterait le risque d'épidémies[3]. Imaginons que, à cause du réchauffement climatique, un nouveau virus encore inconnu touche la population mondiale et que l'un de ses variants déclenche une pandémie. Appelons ce variant le *omacron-23*.
En Suisse, le *omacron-23* a touché 10% de la population. Un test pour dépister la maladie est fiable à 85%. C'est-à-dire que chez les personnes infectées, le test est positif dans 85% des cas. Le test a un taux de faux positifs de 5% (le test est positif mais la personne est saine). On définit les événements suivant:

- P : La personne est positive.
- N : La personne est négative.
- I : La personne est infectée.
- S : La personne est saine.

[3] Carlson, C.J., Albery, G.F., Merow, C. et al. Climate change increases cross-species viral transmission risk. Nature 607, 555–562 (2022). https://doi.org/10.1038/s41586-022-04788-w

Répondez aux questions suivantes en utilisant les notations correctes:

1. En prenant une personne au hasard dans la population, quelle est la probabilité qu'elle soit infectée? Saine?
2. A l'aide des probabilités conditionnelles, définissez mathématiquement la fiabilité du test et le taux de faux positifs.
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculez la probabilité qu'un test soit positif.
4. Xavier, qui est une personne au hasard dans la population, se fait tester et manque de bol, le test est positif. Quelle est la probabilité que Xavier soit effectivement infecté (la formule de Bayes peut peut-être venir en aide à ce pauvre Xavier)?

Exercice 12. *Changement de température* (5 points) ⋆⋆
Dans cet exercice, nous allons étudier l'impact des changements de moyenne et de variabilité des températures. Selon le **GIEC** (Le Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) le changement climatique aurait pour conséquence de modifier la moyenne, mais aussi la variance des températures (voir [4], chapitre 2.7).

Un groupe de scientifiques a mesuré la distribution D_1 des températures (en degrés) de la région de *Crocod'île* et s'est rendu compte que cette distribution suivait une loi normale de moyenne 18 et d'écart-type 12 ($D_1 = N(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 18$ et $\sigma = 12$). Après de savants calculs, les scientifiques ont remarqué avec horreur que si les habitants de *Crocod'île* ne changeaient pas rapidement leurs habitudes, dans dix ans la distribution D_2 des températures serait toujours normale, mais avec une moyenne de 21 et un écart-type de 17 ($D_2 = N(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 21$ et $\sigma = 17$).

Pour voir concrètement les effets de ce changement, répondez aux questions suivantes:

1. Faites un croquis des deux distributions D_1 et D_2.
2. Pour chacune des distributions D_1 et D_2, calculez la probabilité d'avoir une température *en dessous* de -20 degrés, commentez vos résultats.
3. Pour chacune des distributions D_1 et D_2, calculez la probabilité d'avoir une température *au dessus* de 40 degrés, commentez vos résultats.
4. Xavier n'est pas un reptilien et ne se sent bien que quand la température est entre 15 et 25 degrés. Pour chacune des distributions D_1 et D_2, calculez la probabilité que Xavier se sente bien, commentez vos résultats.

[4] https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/03/TAR-02.pdf

Exercice 13. (5 points) $\star\star$
La durabilité de nos appareils électroménagers et électroniques représente un enjeu écologique important. En effet, selon l'ADEME (Agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie), ces appareils représentent une part élevée des émissions de CO_2, en grande partie lors de leur fabrication, mais aussi par leur consommation. Pour réduire notre impact environnemental par rapport à ces appareils, une solution est d'allonger leur durée de vie.[5]
Dans cet exercice, on va s'intéresser à la durée de vie X d'un lave-linge. On sait que les durées de vie suivent en général des lois exponentielles, on suppose donc que X suit une loi exponentielle de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Calculez la fonction de répartition de X.

(b) Calculez la probabilité que ce lave-linge ait une durée de vie comprise entre 2 et 6 ans.

(c) Calculez la probabilité que ce lave-linge ait une durée de vie de moins de 2 ans.

(d) Calculez la probabilité que ce lave-linge ait une durée de vie de plus de 10 ans.

(e) On possède ce lave-linge depuis 2 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 10 ans à partir de maintenant ? Comparez le résultat obtenu avec le résultat de la question (d), qu'est-ce que vous observez ? Quelle propriété de la loi exponentielle cela vérifie-t-il ?

(f) En utilisant l'intégration par parties, calculez l'espérance et la variance de la durée de vie d'un tel lave-linge.

Exercice 14. Une population de N individus est infectée par un virus dans une faible proportion p. On divise la population en groupes de n individus (on suppose que n divise N pour simplifier).
Une première analyse sanguine est effectuée par groupe, et est positive si au moins un des individus du groupe est positif. Si le résultat est positif, on analyse individuellement les échantillons de tous les individus du groupe.

1. Dans chaque groupe, on dénote Z le nombre d'individus infectés. Déterminer q la probabilité que $Z \geq 1$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de groupes positifs.

3. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre d'analyses effectuées. Calculer l'espérance et la variance de Y en fonction de n, N et p.

4. Que vaut cette espérance pour $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$?

[5] https://presse.ademe.fr/2018/09/consoresponsable-lademe-a-etudie-la-face-cachee-des-objets.html

Exercice 15. (5 points) $\star\star$
Un classement européen réalisé par l'office européen de la statistique "Eurostat" révèle que chaque suisse produit en moyenne 706 kg de déchets par année, une des moyennes les plus élevées d'Europe.
Cependant, les suisses font également partie des recycleurs les plus actifs et excellent en matière de compostage. À noter que le taux de recyclage dépend fortement du type de déchet. Par exemple, celui du verre est nettement plus élevé que celui du plastique.

Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de bouteilles de verre recyclées et Y le nombre de bouteilles en pet recyclées. On a remarqué qu'en Suisse, environ neuf bouteilles de verre sur dix sont recyclées alors que cette proportion diminue à seulement deux sur cinq pour les bouteilles en PET.

1. On tire au hasard 100'000 bouteilles de verre consommées. Quelle est la loi de X ? Quelle est l'espérance de X et la variance de X?
2. Et si l'on tire au hasard 100'000 bouteilles en PET ? Quelles est la loi de Y ? son espérance? sa variance ?
3. Approximer les probabilités $\mathbb{P}(X \leq 85000)$ et $\mathbb{P}(X \geq 85000)$ à l'aide de la loi normale
4. Approximer les probabilités du point 3 pour Y

Exercice 16. (5 points) $\star\star$
Selon une étude publiée dans le journal *Trends in Ecology and Evolution*, certaines espèces d'oiseaux ont vu la taille de leur becs augmenter afin de s'adapter au réchauffement de leur habitat.
Ces extrémités permettent à certaines espèces de réguler leur température interne, comme c'est le cas pour les éléphants avec leurs grandes oreilles. Les oiseaux font également la même chose, mais avec leur bec. Ainsi, depuis 1871, la taille du bec de certains perroquets australiens a augmenté de 4 à 10% en moyenne.

1. On tire aléatoirement 16 perroquets (échantillon restreint, n petit) d'une certaine espèce de perroquets. La taille moyenne observée de leurs becs est de 2.3 cm. On suppose que la distribution de la taille des becs suit une loi normale.

   Déterminez un intervalle de confiance à 95% pour la taille du bec d'un perroquet de cette espèce si :

   (a) L'écart-type des tailles des becs dans la population, est connu et vaut 0.4 cm.
   (b) L'écart-type des tailles des becs dans la population, est inconnu, mais sur les 16 mesures on observe un écart-type empirique de 0.6 cm.

2. On tire aléatoirement 200 perroquets (échantillon large, n grand) d'une autre espèce de perroquets. La taille moyenne observée de leurs becs est de 4.1 cm.

   Déterminez un intervalle de confiance à 90% pour la taille du bec d'un perroquet de cette espèce si :

   (a) L'écart-type des tailles des becs dans la population, est connu et vaut 0.7 cm.

   (b) L'écart-type des tailles des becs dans la population est inconnu, mais sur les 200 mesures on observe un écart-type empirique de 0.5 cm.

Exercice 17. (5 points) $\star$
Chaque jour en Suisse, la température est relevée plusieurs fois dans plusieurs stations de mesures à travers le pays. Ainsi, avec ces données, on obtient une moyenne annuelle de température depuis 1864, ce qui est représenté sur la figure (1)[6].
On considère les 154 ans entre 1864 et 2018 [7]. Soit X le nombre de fois que la température annuelle est en dessous de 4.49°C entre 1864 et 2018. L'évènement "la température annuelle est en dessous de 4.49°C" arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ?

2. Calculez $\mathbb{P}(65 \leq X \leq 85)$ avec une approximation normale.

3. On relève quelques températures annuelles dans les données:

   3.07 2.84 4.58 5.26 6.64 3.75 4.11 5.05 3.24 4.48 5.72 5.99 3.45

   On connaît la variance, elle vaut $\sigma^2 = 1.3$.
   Calculez un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne μ

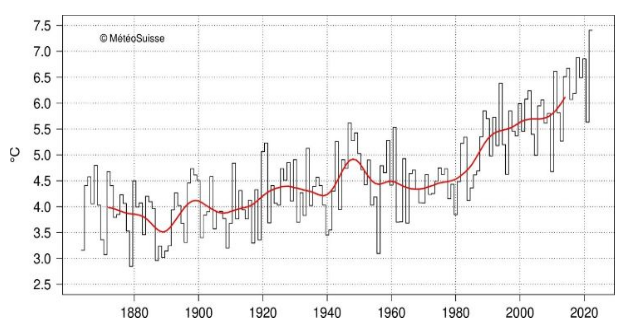

Figure 1: Température moyenne en Suisse depuis 1864. La valeur moyenne pour chaque année est représentée en noir et son évolution en rouge.

[6] https://www.meteosuisse.admin.ch/climat/changement-climatique/evolution-temperature-precipitations-ensoleillement/temperature-moyenne-suisse.html

[7] Pour ces années, vous pouvez retrouver toutes les moyennes de températures annuelles, mensuelles et saisonnières au lien suivant :https://www.meteosuisse.admin.ch/services-et-publications/applications/ext/climate-swissmean.html

Exercice 18. (5 points) $\star\star$
Pour un sondage sur le climat, on a interrogé $n = 5000$ personnes en 2023. A la question: *"Pensez-vous que nous disposons encore du temps nécessaire pour sauver la planète?"*, 2834 personnes ont répondu qu'il était probablement déjà trop tard.

1. Construisez un intervalle de confiance à 95% pour le pourcentage de personnes qui pensent qu'il est déjà trop tard.

2. Selon un article du Temps en 2019[8], cette proportion était de 53%. Faites un test statistique au niveau $\alpha = 0.05$ pour décider si cette proportion a changé ou non en 2023.

Exercice 19. (5 points) $\star\star$
Selon une étude de la National Science Foundation (NSF) publiée dans la revue Nature Communications fin 2021, 11 cyclones tropicaux ont été observés en moyenne chaque année depuis 1850, sur l'océan Atlantique.
En 2021, il y a eu 15 cyclones tropicaux, sur l'océan Atlantique. On fait l'hypothèse d'une distribution de Poisson pour le nombre de cyclones par année.

(a) Formuler l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative dans le cas de cette étude.

(b) Définir et calculer la p-valeur.

(c) Est-il possible de conclure au seuil de 5% que le nombre de cyclones tropicaux a augmenté en 2021? (Autrement dit: est-ce que le résultat est significatif au niveau 5%?)

Indication : $\sum_{i=0}^{15} \frac{e^{-11} 11^i}{i!} \approx 0.854$

Exercice 20. (5 points) $\star\star$
Dans l'ordonnance sur la protection de l'air, des valeurs limites d'émission ont été fixées par le Conseil fédéral pour que les populations humaine, animale, végétale, etc soient protégées contre la pollution atmosphérique.
En particulier, pour le dioxyde d'azote, la valeur limite d'émission pour la moyenne annuelle est fixée à $30\mu g/m^3$. On va chercher à déterminer si cette limite est respectée dans une rue de Bulle. [9] Pour cela, on regarde la moyenne journalière de concentration de dioxyde d'azote (en $\mu g/m^3$) durant une semaine. Les résultats sont les suivants :

$$26 \quad 22 \quad 19 \quad 33 \quad 24 \quad 31 \quad 19$$

Supposons que la concentration de dioxyde d'azote dans la rue suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où σ est inconnu.
On veut tester les hypothèses:

$$H_0 : \mu = 30 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu < 30.$$

[8] `https://www.letemps.ch/suisse/sondage-climat-suisses-attente-mesures-contraignantes`
[9] Vous trouverez sur le lien suivant des informations pouvant être intéressantes : `https://www.fr.ch/energie-agriculture-et-environnement/air/qualite-de-lair`

(a) Définissez et calculez la p-valeur. Peut-on rejeter H_0 au niveau $\alpha = 5\%$? Et au niveau $\alpha = 1\%$?

Supposons à présent que $\sigma = 6$ et que le niveau du test α soit fixé à 1%.

(b) Déterminez le domaine de rejet du test.
Indication: Soient X_i, $1 \leq i \leq 7$, les variables aléatoires représentant la concentration (par unité de volume) le i-ème jour. Il faut trouver le nombre $n_{0.01}$ tel que:

- *si $\overline{X_7} < n_{0.01}$, alors on rejette H_0*
- *si $\overline{X_7} \geq n_{0.01}$, alors on ne rejette pas H_0*

où $\overline{X}_7 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i$.
Ainsi le domaine de rejet sera de la forme $[-\infty, n_{0.01})$.

(c) Pour $H_1 : \mu = 22$, calculez la probabilité de faire l'erreur de type II et déduisez en la puissance du test. Aidez vous du résultat trouvé en (ii).
Rappel: on commet une erreur de type II lorsqu'on ne rejette pas H_0 alors que H_1 est vraie.

Exercice 21. (5 points) ⋆⋆
Un fabriquant de voiture teste l'efficacité d'un nouveau modèle développé. Pour cela, il mesure les litres d'essence consommés pour 100 kilomètres:

14.6	11.21	15.56	11.37	13.68	11.06	26.58	13.37	15.98	12.07	13.22	12.01	15.07

La variance, connue est de $\sigma^2 = 16$

1. Calculer un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne μ.
2. Quel niveau correspond à un intervalle de longueur 3 litres / 100 km?
3. Combien d'observations additionnelles sont nécessaires afin d'obtenir un intervalle de confiance à 99% et de longueur 2 litres/100km ?